MAI 2 – domácí úkol ze cvičení 6 (integrály 5)

(Najděte primitivní funkce na maximálních otevřených intervalech.)

Integrály, které pomocí vhodných substitucí vedou na integraci racionálních funkcí:

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$.

2. $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,dx$; $\int \frac{1}{\sin^2 x + tg^2 x}\,dx$;

   a „slepování" primitivní funkce $\int \frac{2+\sin x}{2-\sin x}\,dx$ nebo $\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx$.

3. Zkuste i integrály typu $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$:

   návod – vhodné substituce:

   $a>0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x \pm t$ nebo $c>0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c}+xt$ (Eulerovy substituce)

   $a<0$ a polynom ax^2+bx+c má dva různé reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$:

   pak lze

   $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\,(x-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2-x}{x-\alpha_1}}$ a substituovat $\sqrt{\frac{\alpha_2-x}{x-\alpha_1}} = t$ nebo

   $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\,(\alpha_2-x)\sqrt{\frac{x-\alpha_1}{\alpha_2-x}}$ a substituovat $\sqrt{\frac{x-\alpha_1}{\alpha_2-x}} = t$

   (a třeba najdete i jiné substituce):

(i) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$; (ii) $\int \frac{x}{\sqrt{6+x-x^2}}\,dx$.

(iii) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$ (zkuste také $t=\frac{1}{x}$, $t=1+x^2$, $t=\sqrt{1+x^2}$ nebo $x=\sinh t$);

nebo

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ také lze $x=\cosh t$ ($\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $\sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ a $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$).